PAT 1 (มี.ค. 56)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

วันเสาร์ที่ 2 มีนาคม 2556 เวลา 13.00 - 16.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 25 ข้อละ 5 คะแนน

1. กำหนดให้ P แทน ประพจน์ "ถ้า $A \cup C \subset B \cup C$ แล้ว $A \subset B$ เมื่อ A, B และ C เป็นเซตใดๆ" และให้ Q แทน ประพจน์ "ถ้า $C \subset A \cup B$ แล้ว $C \subset A$ และ $C \subset B$ เมื่อ A, B และ C เป็นเซตใดๆ" พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   (ก) ประพจน์ $[(P \vee Q) \wedge \sim Q] \Leftrightarrow P$ มีค่าความจริงเป็น จริง

   (ข) ประพจน์ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
   2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
   3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
   4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   (ก) $A - [(A \cap B) \cap (A \cup B \cup C)] = A - B$

   (ข) $P[A - (B \cup C)] = P[(A - B) - C]$

   ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
   2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
   3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
   4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

3. เอกภพสัมพัทธ์ในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ $\forall x[\ |2x+1| > x-1\ ] \rightarrow \exists x\left[\left|\frac{x-2}{x+2}\right| < 2\right]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

1. $(-\infty, -4)$ 2. $(-5, -1)$ 3. $(-3, 2)$ 4. $(-1, \infty)$

4. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $A = \{\ x \in \mathrm{R} \mid |2x-5| + |x| \leq 7\ \}$

$B = \{\ x \in \mathrm{R} \mid x^2 < 12 + |x|\ \}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $A \cap B \subset \{\ x \in \mathrm{R} \mid 1 \leq x < 4\ \}$

(ข) $A - B$ เป็นเซตจำกัด (finite set)

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

5. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง กำหนดให้ $r = \left\{ (x,y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \,\middle|\, \sqrt{12-|x|} + \sqrt{y+1} = 3 \right\}$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\mathrm{D}_r \cap \mathrm{R}_r \subset (-1, 8)$

(ข) $\mathrm{D}_r - \mathrm{R}_r = \{ x \in \mathrm{R} \mid 8 < x \leq 12 \}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

6. ให้ A และ B เป็นเซต โดยที่จำนวนสมาชิกของเซต A และ B เท่ากับ 4 และ 5 ตามลำดับ และจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับ 7 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ความสัมพันธ์ใน $A \cap B$ มี 4 ความสัมพันธ์

(ข) ความสัมพันธ์จาก $A - B$ ไป $B - A$ มี 64 ความสัมพันธ์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

7. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ความสัมพันธ์ $\{ (x, y) \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} \mid x^2 + y^2 = 4 ,\ xy > 0 \}$ เป็นฟังก์ชัน

(ข) ถ้า $f(x) = \begin{cases} x - 2 & , x \leq 0 \\ x^2 & , x > 0 \end{cases}$ และ $g(3x - 1) = 2x^2 + 3x$ สำหรับ $x \in \mathrm{R}$ แล้วค่าของ $(g \circ f^{-1})(25) = 14$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

8. ให้พาราโบลา P มีสมการเป็น $y^2 - 2y + 6x + 4 = 0$ ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา P และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 2y - 6 = 0$ ณ จุด $(4, 3)$ แล้วสมการของวงกลมตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $7x^2 + 7y^2 - 4x - 82y - 55 = 0$
2. $7x^2 + 7y^2 + 4x + 82y + 55 = 0$
3. $7x^2 + 7y^2 - 4x + 82y - 55 = 0$
4. $7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \sec 20^\circ - \tan 20^\circ$

(ข) $\sqrt{3}\cot 20^\circ = 1 + 4\cos 20^\circ$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

10. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากสุด โดยที่ $0 < x < 1$ และสอดคล้องกับ $\arctan(1-x) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2x}\right) = 2\operatorname{arcsec}\sqrt{1+2x(1-x)}$ แล้ว ค่าของ $\cos \pi x$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. 0
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{x} & , |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ ค่าของ $f\left(f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. -6
2. 6
3. -3
4. 3

12. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_x\left(\frac{2}{x-1}\right) \geq 1$ แล้ว A เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{ x \in \mathrm{R} \mid |x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2 \}$
2. $\{ x \in \mathrm{R} \mid |2x + 5| > 9 \}$
3. $\{ x \in \mathrm{R} \mid 0 \leq |x + 3| \leq 5 \}$
4. $\{ x \in \mathrm{R} \mid x^3 > 3x^2 \}$

13. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ มีมิติ 3×3 โดยที่ $\det(A) = 2$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & -2 & y \end{bmatrix}$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $AB + 3A = 2\mathrm{I}$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ ที่มีมิติ 3×3 แล้ว $x + y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. -1
3. -2
4. -2.5

14. กำหนดให้ $P = a(x+y) + 6y$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยมีอสมการข้อจำกัดดังนี้

$3x + 4y \leq 48$, $x + 2y \leq 22$, $3x + 2y \leq 42$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$

ถ้า P มีค่ามากสุดเท่ากับ 288 แล้ว ค่ามากที่สุดของ a ที่เป็นจำนวนเต็มบวกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20 2. 18 3. 16 4. 14

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ให้เวกเตอร์ $\bar{w} = a\bar{\imath} + b\bar{\jmath} + c\bar{k}$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงและให้เวกเตอร์ $\bar{u} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$ และ $\bar{v} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + \bar{k}$ ถ้าเวกเตอร์ $\bar{w}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\bar{u}$ และเวกเตอร์ $\bar{v}$ แล้ว $a + b + c = 1$

(ข) ให้เวกเตอร์ $\bar{u} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ และ $\bar{v} = a\bar{\imath} + b\bar{\jmath}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ถ้า $|\bar{v}| = \frac{3}{\sqrt{5}}$ และ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 3$ แล้วเวกเตอร์ $\bar{u}$ ทำมุม $60°$ กับเวกเตอร์ $\bar{v}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

16. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้าด้านตรงข้ามมุม A ยาว 14 หน่วย ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 30 หน่วยและ $3\sin B = 5\sin C$ แล้ว $\sin 2A$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. กำหนดให้ $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y - 199 = 0$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีแกนสมมาตรขนานแกน y ตัดแกน x ที่จุด $(1, 0)$ และผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ แล้ว จุดในข้อใดต่อไปนี้ไม่อยู่บนพาราโบลา

1. $(2, \frac{1}{8})$ 2. $(-1, \frac{1}{2})$ 3. $(3, \frac{1}{2})$ 4. $(4, \frac{1}{4})$

18. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $a_n = \frac{1}{4+8+12+\cdots+4n}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ผลบวกของอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. 2

19. ค่าของ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x-1)}-x+2\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. $\frac{3}{2}$

20. กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้ง $y=\frac{3x^4-2}{x^3}$ เมื่อ $x>0$ และให้ L เป็นเส้นตรงที่สัมผัสกับเส้นโค้ง C ที่จุด $(1,1)$ ถ้าเส้นตรง L ตัดกับพาราโบลา $x(x-1)=y-1$ ที่จุด A และ จุด B แล้วระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $4\sqrt{82}$ 2. $8\sqrt{82}$ 3. $4\sqrt{41}$ 4. $8\sqrt{41}$

21. กำหนดให้ $P(E)$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆในแซมเปิลสเปซ โดยที่ $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B')=\frac{5}{8}$ และ $P(A'\cap B')=\frac{1}{4}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $P(A'\cup B)=\frac{5}{8}$

(ข) $P(A\cup B')=\frac{3}{4}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

22. ในการโยนลูกเต๋าสองลูกจำนวนหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลคูณของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสอง หารด้วย 4 ลงตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{6}{36}$
2. $\frac{11}{36}$
3. $\frac{15}{36}$
4. $\frac{27}{36}$

23. ครอบครัวหนึ่งมีสมาชิก 6 คน มีอายุเฉลี่ย 34 ปี ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุเท่ากับ 8 ปี อีก 6 ปีต่อมามีญาติสองคนมาขออยู่อาศัยด้วย โดยที่ญาติทั้งสองคนนี้มีอายุเท่ากัน เท่ากับอายุเฉลี่ยของคนทั้ง 6 คนในครอบครัวนี้พอดี สัมประสิทธิ์การแปรผันของอายุของคนทั้ง 8 คนนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{3}}{10}$
2. $\frac{10}{\sqrt{3}}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{20}$
4. $\frac{20}{\sqrt{3}}$

24. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่งมีดังนี้ $2, 4, 3, 5, 12, 5, 18, 6, 4, 2, 9, 4$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. มัธยฐานน้อยกว่าฐานนิยม
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตมากกว่ามัธยฐาน
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับมัธยฐาน
4. ฐานนิยมมากกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต

25. กำหนดให้ $A=\sqrt{7\sqrt[3]{5}}$, $B=\sqrt{5\sqrt[3]{7}}$, $C=\sqrt[3]{5\sqrt{7}}$ และ $D=\sqrt[3]{7\sqrt{5}}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $D>C>A>B$
2. $A>C>B>D$
3. $A>B>D>C$
4. $C>A>D>B$

ตอนที่ 2 ข้อ 26 - 50 ข้อละ 7 คะแนน

26. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตจำกัด โดยที่ $A\cap B\neq\emptyset$
สับเซตของ A ที่มีสมาชิก 2 ตัว มีทั้งหมด 10 เซต และสับเซตของ B ที่มีสมาชิก 2 ตัว มีทั้งหมด 6 เซต
ถ้า จำนวนสมาชิกของ $P\big(P(A\cap B)\big)$ เท่ากับ 16 เมื่อ $P(S)$ แทน เพาเวอร์เซตของ S
แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต $A\cup B$ เท่ากับเท่าใด

27. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $5^{(x-2^A)}2^{y^A}=(16)^{64}$ เมื่อ $A=\frac{\log y}{\log x}$
แล้ว ค่าของ $x+y$ เท่ากับเท่าใด

28. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$
ถ้า $(1+\tan^2 x)\cot x = \frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1
แล้ว a^2+b^2 เท่ากับเท่าใด

29. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \{x \in \mathrm{R} \mid \log_{\sqrt{3}}(x-1) - \log_{\sqrt[3]{3}}(x-1) = 1\}$ และ
$$B = \{x \in \mathrm{R} \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2\}$$
แล้วสามเท่าของผลคูณของสมาชิกในเซต $A \cup B$ ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

30. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $5^{(1+\sqrt{x^2-4x-1})} + 5^{\left(\frac{5+4x-x^2}{2+\sqrt{x^2-4x-1}}\right)} = 126$
ผลบวกของสมาชิกในเซต A ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

31. กำหนดให้วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และมีโฟกัส F_1 และ F_2 อยู่บนแกน x จุด $A(4,1)$ เป็นจุดบนวงรีโดยที่ผลบวกระยะทางจากจุด $A(4,1)$ ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองมีค่าเท่ากับ $6\sqrt{2}$ ให้เส้นตรง L ตัดแกน x ที่จุด $(4.5,0)$ และสัมผัสกับวงรีที่จุด $A(4,1)$ ถ้า d เป็นระยะห่างระหว่างจุด (0.0) กับเส้นตรง L แล้ว ค่าของ $d^2|AF_1||AF_2|$ เท่ากับเท่าใด

32. กำหนดให้ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ โดยที่ $\theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\right)-\arctan\left(\sqrt{x}\right)$ เมื่อ $0<x<1$ ค่าของ $\tan\theta+\cot\theta$ เท่ากับเท่าใด

33. ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix}4 & -2 & 7\\ x & -1 & 3\\ 2 & 0 & x\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน และ y เท่ากับผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต S
ถ้า $A=\begin{bmatrix}y & 1\\ -1 & y\end{bmatrix}$ แล้ว ค่าของ $\det(((A^t)^{-1})^t)^{-1}$ เท่ากับเท่าใด

34. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก โดยมี r เป็นอัตราส่วนร่วม และ

$$\frac{a_1+a_3}{a_2+a_4}+\frac{a_3+a_5}{a_4+a_6}+\frac{a_5+a_7}{a_6+a_8}+\ldots+\frac{a_{2011}+a_{2013}}{a_{2012}+a_{2014}}=2012$$

ค่าของ $1+5r+12r^2+22r^3+\ldots$ เท่ากับเท่าใด

35. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในควอดรันต์ (quadrant) ที่หนึ่งบนระนาบเชิงซ้อน โดยที่ $\left|\frac{(z+1)(1+\mathrm{i})}{z(1+\mathrm{i})+5+\mathrm{i}}\right|=1$ และ $|z|=\sqrt{65}$ แล้วผลบวกของส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ z เท่ากับเท่าใด

36. กำหนดให้ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 และ $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริงบวก โดยที่ $a_1=b_2$, $a_5=b_5$ และ $a_1\neq a_5$ ถ้า $\frac{(b_6-b_4)+(b_6-b_1)}{a_4-a_2}=\frac{x}{y}$ เมื่อ ห.ร.ม. ของ x กับ y เท่ากับ 1 แล้ว x^2+y^2 เท่ากับเท่าใด

37. สำหรับ $n = 2, 3, 4, \ldots$ ให้ $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$
ค่าของ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \ldots a_n}{(a_2-1)(a_3-1)(a_4-1)\ldots(a_n-1)}$ เท่ากับเท่าใด

38. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-8}{2x-\sqrt{4x^2-3x+12}} & , x < 4 \\ \frac{kx}{3} & , x \geq 4 \end{cases}$ โดยที่ k เป็นจำนวนจริง ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 4$ แล้ว $f(k+1)$ เท่ากับเท่าใด

39. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เทียบกับ x เท่ากับ $ax^3 + bx$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และให้ $g(x) = (x^3 + 2x)f(x)$ ถ้า $f'(1) = 18$, $f''(0) = 6$ และ $f(2) = f(1) + f(0)$ แล้วค่าของ $g'(-1)$ เท่ากับเท่าใด

40. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามกำลังสาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง โดยมี $x+1$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ $5+2\mathrm{i}$ เป็นคำตอบของสมการ $f(x)=0$ และ $f(0)=58$ ค่าของ $\int_0^2 [f(x)-f(-x)]dx$ เท่ากับเท่าใด

41. ต้องการนำเลขโดด $1,1,2,2,3,3$ ทั้ง 6 ตัวมาจัดเรียงเป็นจำนวนที่มี 6 หลัก จะสร้างจำนวนที่มี 6 หลักได้ทั้งหมดกี่จำนวน เมื่อเลข 1 ทั้งสองตัวไม่ติดกัน และเลข 3 ทั้งสองตัวไม่ติดกัน

42. กำหนดให้ a,b,c,d เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a<2b$, $b<5c$, $c<6d$, $d<100$ ค่าของ a มีค่ามากสุดเท่ากับเท่าใด

43. กำหนดให้ $a, b, c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ จงหาจำนวน 3 หลัก abc ที่มีค่ามากที่สุด
โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข $abc = ab + ba + ac + ca + bc + cb$
*หมายเหตุ abc คือ เลข 3 หลัก และ $ab, ba, \ldots$ คือ เลข 2 หลัก

44. จังหวัดแห่งหนึ่งมีอำเภอ 6 อำเภอ แต่ละอำเภอส่งผู้แทนอำเภอละ 2 คน เป็นชาย 1 คน และเป็นหญิง 1 คน ถ้าต้องการคัดเลือกกรรมการ 4 คน เป็นชาย 2 คน และหญิง 2 คน จากตัวแทนทั้ง 12 คน โดยในบรรดากรรมการ 4 คนนี้ จะต้องเป็นชายและหญิงอย่างน้อย 1 คู่ มาจากอำเภอเดียวกัน จะมีวิธีการคัดเลือกกี่วิธี

45. กำหนดให้ $\bar{a}, \bar{b}$ และ $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบซึ่งกำหนดโดย $\bar{a} = x\bar{\imath} + \frac{12}{5}\bar{\jmath}$, $\bar{b} = 6\bar{\imath} + y\bar{\jmath}$ และ $\bar{c} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$
เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $|\bar{b} - \bar{c}| = 5$, เวกเตอร์ $\bar{a}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\bar{b}$ และ $\bar{a} \cdot \bar{c} > 0$
แล้วค่าของ $|5\bar{a} + \bar{b}|^2$ เท่ากับเท่าใด

46. ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ นาย ก. และ นาย ข. เป็นนักเรียนในห้องนี้ ถ้ามีนักเรียนในห้องนี้ร้อยละ 9.48 สอบได้คะแนนมากกว่าคะแนนสอบของนาย ก. มีนักเรียนร้อยละ 10.64 สอบได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนสอบของ นาย ข. และ นาย ข. สอบได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนสอบของ นาย ก. อยู่ 51 คะแนน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบครั้งนี้เท่ากับเท่าใด
เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระกว่าง 0 ถึง z ดังตารางต่อไปนี้

z	0.24	0.27	1.24	1.31
พื้นที่	0.0948	0.1064	0.3936	0.4052

47. จากการสำรวจคะแนนสอบของนักเรียน 6 คน ที่มีคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ (x_i) และ คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (y_i) ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์เท่ากับ 9 คะแนน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 6 คะแนน และ $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 428$, $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 694$ และ $\sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 268$ ถ้าคะแนนสอบวิชาทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง และนักเรียนคนหนึ่งที่มีคะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 7.5 คะแนน แล้วคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ โดยประมาณ ควรจะมีค่าเท่ากับเท่าใด

48. สำหรับ $x, y \in \{0, 1, 2, 3. \ldots\}$ กำหนดให้ $F(x, y)$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$F(x,y) = \begin{cases} F(1, y-1) & , \quad x = 0, y \neq 0 \\ x+1 & , \quad y = 0 \\ F(F(x-1, y), y-1) & , \quad x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

ค่าของ $F(1, 2) + \mathrm{F}(3, 1)$ เท่ากับเท่าใด

49. สำหรับ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ กำหนดให้ $x * y$ เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติต่อไปนี้

(1) $x * (xy) = (x * x)y$

(2) $x * (1 * x) = 1 * x$

(3) $1 * 1 = 1$

ค่าของ $2 * (5 * (5 * 6))$ เท่ากับเท่าใด

50. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสอดคล้องกับ $(f \circ f)(x) = 4 + x\big(4 - f(x)\big)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้วค่าของ $f(4)$ เท่ากับเท่าใด

เฉลย

1. 2	11. 2	21. 1	31. 162	41. 48
2. 1	12. 3	22. 3	32. 2	42. 5927
3. 2	13. 4	23. 1	33. 2	43. 396
4. 3	14. 2	24. 2	34. 16	44. 135
5. 4	15. 4	25. 3	35. 11	45. 200
6. 3	16. 2	26. 7	36. 205	46. 20
7. 1	17. 4	27. 20	37. 3	47. 12
8. 4	18. 1	28. 373	38. 24	48. 10
9. 1	19. 4	29. 5	39. 354	49. 6
10. 3	20. 2	30. 4	40. 168	50. 4

แนวคิด

1. 2

P เป็นเท็จ เช่น $C=\{1\}$, $A=\{1\}$, $B=\{\}$ และ Q ก็เป็นเท็จ เช่น $C=\{1,2\}$, $A=\{1\}$, $B=\{2\}$

จะได้ (ก) คือ $[(\mathrm{F})\wedge \mathrm{T}]\Leftrightarrow \mathrm{F}\equiv \mathrm{T}$ ถูกต้อง และ (ข) คือ $(\mathrm{T})\Rightarrow(\mathrm{T})\equiv \mathrm{T}$ ผิด

2. 1

ก. เนื่องจาก $A\cap B\subset A\cup B\cup C$ ดังนั้น $(A\cap B)\cap(A\cup B\cup C)=A\cap B$

ดังนั้น $A-[(A\cap B)\cap(A\cup B\cup C)]=A-(A\cap B)=A-B$ → ก. ถูก

ข. $A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)'=A\cap B'\cap C'=(A-B)-C$ → ข. ถูก

3. 2

เป็นเท็จ เมื่อ $\mathrm{T}\to\mathrm{F}$ ข้างหน้า จะได้ $2x+1>x-1$ หรือ $2x+1<-(x-1)$ หรือ $x-1\le 0$

ได้ $(-2,\infty)\cup(-\infty,0)\cup(-\infty,1]=\mathrm{R}$

ข้างหลังต้องเป็นเท็จ ได้ $\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\ge 2$ ยกกำลังสองได้เพราะเป็นบวกทั้งสองข้าง ได้ $\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2-2^2\ge 0$

ตัวหารห้ามเป็น $0\to x\neq 2$ และคูณ $(x+2)^2$ ตลอดได้ $(x-2)^2-(2x+4)^2\ge 0$

→ $(3x+2)(-x-6)\ge 0$ ได้คำตอบคือ $[-6,-\frac{2}{3}]-\{-2\}$ → ตอบข้อ 2

4. 3

A แบ่งกรณี กรณี $(-\infty,0)$ ได้ $-3x\le 2\to x\ge-\frac{2}{3}\to[-\frac{2}{3},0)$

กรณี $[0,\frac{5}{2})$ ได้ $-x\le 2\to x\ge -2\to[0,\frac{5}{2})$

กรณี $[\frac{5}{2},\infty)$ ได้ $3x\le 12\to x\le 4\to[\frac{5}{2},4]$ รวมทุกกรณีได้ $A=[-\frac{2}{3},4]$

B แบ่งกรณี กรณี $(-\infty,0)$ ได้ $x^2+x-12<0\to(x+4)(x-3)<0\to x\in(-4,3)\to(-4,0)$

กรณี $[0,\infty)$ ได้ $x^2-x-12<0\to(x-4)(x+3)<0\to x\in(-3,4)\to[0,4)$

รวมทุกกรณี ได้ $B=(-4,4)$

$A\cap B=[-\frac{2}{3},4)\to$ ก ผิด , $A-B=\{4\}\to$ ข ถูก

5. 4

หา D_r : $\sqrt{y+1}=3-\sqrt{12-|x|}\to 3-\sqrt{12-|x|}\ge 0\to 0\le 12-|x|\le 9\to 3\le|x|\le 12$

จะได้ $D_r = [-12,-3] \cup [3,12]$

หา R_r : $\sqrt{12-|x|} = 3-\sqrt{y+1} \rightarrow 0 \le 3-\sqrt{y+1} \le \sqrt{12} \rightarrow 3-\sqrt{12} \le \sqrt{y+1} \le 3$

แต่ $3-\sqrt{12}$ เป็นลบ ยังไงก็จริง $\rightarrow -1 \le y \le 8$ จะได้ $R_r = [-1,8]$

$D_r \cap R_r = [3,8]$ มี 8 ดังนั้น ก ผิด , $D_r - R_r = [-12,-3] \cup (8,12]$ มีเลขลบด้วย ดังนั้น ข ผิด

6. 3

ก. $n(A \cap B) = 4+5-7 = 2 \rightarrow$ มี $2^{2\times 2} = 16 \rightarrow$ ก ผิด

ข. $n(A-B) = 4-2 = 2$, $n(B-A) = 5-2 = 3 \rightarrow$ มี $2^{2\times 3} = 64 \rightarrow$ ข ถูก

7. 1

ก. เป็นวงกลมที่เอาเฉพาะเส้นภายใน Q_1 กับ Q_3 ลากแนวดิ่งตัดไม่เกิน 1 จุด $\rightarrow$ ก. ถูก

ข. หา $f^{-1}(25)$ ให้ $x-2 = 25$ ได้ $x = 27$ ขัดกับเงื่อนไข $x \le 0$

ให้ $x^2 = 25$ ได้ $x = \pm 5$ ถ้าจะให้ตรงกับเงื่อนไข $x > 0$ จะได้ $x = 5$ ดังนั้น $f^{-1}(25) = 5$

หา $g(5)$ ให้ $3x-1 = 5$ ได้ $x = 2$ แทนใน $2x^2+3x$ จะได้ 14 $\rightarrow$ ข. ถูก

8. 4

พาราโบลาคือ $(y-1)^2 = -6\left(x+\frac{1}{2}\right) \rightarrow F = (-\frac{1}{2}-\frac{6}{4},1) = (-2,1)$

ลองเอา $(-2,1)$ แทน จะได้ $28+7\pm(-8)\pm 82 \pm 55 = 0$ ต้องเป็น $28+7+(-8)-82+55 \rightarrow$ ข้อ 4

ถ้าไม่เช็คตัวเลือก ให้วงกลมมี ศก ที่ (a,b) ดังนั้น $(a+2)^2+(b-1)^2 = (a-4)^2+(b-3)^2$

$\rightarrow a^2+4a+4+b^2-2b+1 = a^2-8a+16+b^2-6b+9$

$\rightarrow 12a+4b = 20 \rightarrow 3a+b = 5$ ...(1)

และจากความชัน จะได้ $\frac{b-3}{a-4} = -\frac{2}{3} \rightarrow 3b-9 = -2a+8 \rightarrow 2a+3b = 17$ ...(2)

$3(1)-(2) : 7a = -2 \rightarrow a = -\frac{2}{7} \rightarrow b = \frac{41}{7}$ ได้ $r^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2+\left(\frac{34}{7}\right)^2$

ได้สมการวงกลมคือ $\left(x+\frac{2}{7}\right)^2+\left(y-\frac{41}{7}\right)^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2+\left(\frac{34}{7}\right)^2$

จัดรูปได้ $x^2+y^2+\frac{4x}{7}-\frac{82y}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{41}{7}\right)^2-\left(\frac{12}{7}\right)^2-\left(\frac{34}{7}\right)^2 = 0$

$\rightarrow 7x^2+7y^2+4x-82y-\left(\frac{14\cdot 10}{7}\right)+\left(\frac{75\cdot 7}{7}\right) = 0$

$\rightarrow 7x^2+7y^2+4x-82y+55 = 0$

9. 1

ก) $\frac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}\cdot\frac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ} = \frac{\cos^2 10^\circ+\sin^2 10^\circ-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\cos^2 10^\circ-\sin^2 10^\circ} = \frac{1-\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sec 20^\circ - \tan 20^\circ \rightarrow$ ถูก

ข) $\sqrt{3}\cot 20^\circ = \frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\sin 20^\circ+\frac{1}{2}\sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ}$

$= \frac{2\left(\sin 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 60^\circ\sin 20^\circ+\frac{1}{2}\sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{2\left(\sin 40^\circ+\frac{1}{2}\sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{2\left(2\sin 20^\circ\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ}$

$= \frac{4\sin 20^\circ\cos 20^\circ+\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4\cos 20^\circ+1 \rightarrow$ ถูก

10. 3

ใส่ tan ตลอด ได้ $\frac{1-x+2x}{1-(1-x)(2x)}=\frac{2\sqrt{2x(1-x)}}{1-2x(1-x)} \rightarrow 1+x=2\sqrt{2x(1-x)} \rightarrow 1+2x+x^2=8x-8x^2$
$\rightarrow 9x^2-6x+1=0 \rightarrow (3x-1)^2=0 \rightarrow x=\frac{1}{3} \rightarrow \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

11. 2

$\left|-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{2}$ ดังนั้น $f\left(f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)=f(f(-3))$
$|-3|\geq\frac{1}{2}$ ดังนั้น $f(f(-3))=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{-3}\right)=f\left(\frac{1}{6}\right)$
$\left|\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{2}$ ดังนั้น $f\left(\frac{1}{6}\right)=6$

12. 3

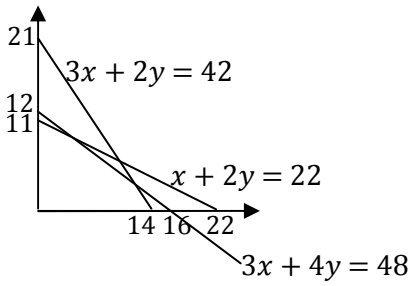
หลัง log เป็นลบไม่ได้ ดังนั้น $x>1$ จะได้ $\frac{2}{x-1}\geq x$
คูณ $x-1$ ทั้งสองข้างได้ ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย เพราะ $x>1$ ทำให้ $x-1$ เป็นบวก $\rightarrow 2\geq x^2-x$
$\rightarrow 0\geq(x-2)(x+1) \rightarrow x\in[-1,2] \rightarrow$ แต่ $x>1$ ดังนั้น คำตอบคือ $(1,2]$
ลองเอา $x=2$ แทนดู ข้อ 1. ได้ฝั่งขวาติดลบ ไม่จริงแน่นอน ข้อ 2. ได้ $9>9$ ไม่จริง ข้อ 3. ได้ $0<5<5$ จริง
ข้อ 4. ได้ $8>12$ ไม่จริง $\rightarrow$ ตอบข้อ 3
หมายเหตุ ถ้าจะแก้ ข้อ 1. อยู่ในรูป $|A|=-A$ จะได้ $A\leq 0$ ดังนั้น $x^2+2x-3<0$
แยกได้ $(x+3)(x-1) \rightarrow [-3,1]$

13. 4

ได้ $A(B+3\mathrm{I})=2\mathrm{I} \rightarrow 2\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 2 & x\\ 0 & -2 & y+3\end{vmatrix}=2^3 \rightarrow (2)(8y+24+8x)=8 \rightarrow x+y=-2.5$

14. 2

จุดตัดอยู่ใกล้กัน ต้องหาทุกจุดตัด ไม่งั้นรูปจะไม่ถูก
$3x+4y=48$ กับ $x+2y=22$ ตัดกันที่ $(4,9)$
$x+2y=22$ กับ $3x+2y=42$ ตัดกันที่ $(10,6)$
$3x+4y=48$ กับ $3x+2y=42$ ตัดกันที่ $(12,3)$
จุดมุม คือ $(0,0),(0,11),(4,9),(12,3),(14,0)$
ได้ $P=0,\ 11a+66,\ 13a+54,\ 15a+18,\ 14a$



จับแต่ละตัว $=288$ แล้วแก้หา a ได้ $a=18$ จาก $13a+54$ กับ $a=18$ จาก $15a+18$
ลองแทน $a=18$ จะได้ 288 มากสุดในบรรดา $11a+66,\ 13a+54,\ 15a+18,\ 14a$

15. 4

ก. ตั้งฉาก $=$ ดอทกันได้ $0 \rightarrow a+2b+c=0$ และ $a-b+c=0$ จับลบกัน ได้ $b=0$
แทนกลับไป ได้ $a+c=0$ ดังนั้น $a+b+c=0 \rightarrow$ ก ผิด
ข. $3=|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{5}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)}=1 \rightarrow \theta=0 \rightarrow$ ข ผิด

16. 2

จากกฎของ sin ได้ $\frac{14}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{16-b}{\sin C}$ และจากที่โจทย์ให้ จะได้ $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{5}{3}$ ได้ $\frac{\mathrm{b}}{16-\mathrm{b}}=\frac{5}{3}\ \rightarrow\ 3b=80-5b$
$\rightarrow\ b=10\ ,\ c=6\ \rightarrow$ กฎของ cos ได้ $14^2=10^2+6^2-2(10)(6)\cos A\ \rightarrow\ \cos A=-\frac{1}{2}$
มุมในสามเหลี่ยม มี $0°<A<180°$ ได้ $A=120°\ \rightarrow\ \sin 2A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. 4

จัดรูปได้ $9(x-1)^2-16(y-2)^2=199+9-64\ \rightarrow\ \frac{(x-1)^2}{4^2}-\frac{(y-2)^2}{3^2}=1\ \rightarrow\ \mathrm{V}=(-3,2),(5,2)$
ผ่าน $(-3,2),(5,2)$ แสดงว่าจุดยอด คือ $(1,?)$ โจทย์บอกผ่าน $(1,0)$ แสดงว่าจุดยอดคือ $(1,0)$
ได้สมการคือ $(x-1)^2=4cy\ \rightarrow$ แทน $(5,2)$ ได้ $c=2\ \rightarrow\ (x-1)^2=8y\ \rightarrow$ ข้อ 4 แทนแล้วไม่จริง

18. 1

$a_n=\frac{1}{4\cdot\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{1}{2n(n+1)}\ \rightarrow$ เทเลสโคป ได้ $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ \rightarrow$ ได้ผลบวก $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{2}$

19. 4

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x(x-1)}-x\right)\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}{\sqrt{x(x-1)}+x}+2\ =\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x(x-1)}+x}+2\ =\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1\left(1-\frac{1}{x}\right)}+1}+2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

20. 2

$y=3x-2x^{-3}\ \rightarrow\ y'=3+6x^{-4}\ \rightarrow$ ที่ $(1,1)$ ชัน $9\ \rightarrow$ ผ่าน $(1,1)$ ได้ $\mathrm{L}:\ y=9x-8$
แก้หาจุดตัด $x^2-x\ =\ 9x-8-1\ \rightarrow\ x^2-10x+9=0\ \rightarrow\ x=9,1\ \rightarrow\ (9,73),(1,1)$
ได้ระยะห่าง $=\sqrt{8^2+72^2}\ =\ 8\sqrt{1+9^2}\ =\ 8\sqrt{82}$

21. 1

จากแผนภาพ จะได้ $P(A)+P(B-A)+P(A'\cap B')=1\ \rightarrow\ P(B-A)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ =\frac{1}{4}$
จาก $P(B')\ =\frac{5}{8}$ ได้ $P(B)\ =\frac{3}{8}$ ได้ $P(A\cap B)=P(B)-P(B-A)\ =\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$
และได้ $P(A-B)\ =\ P(A)-P(A\cap B)\ =\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$
ดังนั้น $P(A'\cup B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}\ \rightarrow$ ก ถูก และ $P(A\cup B')\ =\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\ \rightarrow$ ข ถูก

22. 3

กรณีลูกแรกออก $1,3,5\ \rightarrow$ ลูกหลังต้องออก $4\ \rightarrow\ 3$ แบบ
กรณีลูกแรกออก $2,6\ \rightarrow$ ลูกหลังต้องออก $2,4,6\ \rightarrow\ 6$ แบบ
กรณีลูกแรกออก $4\ \rightarrow$ ลูกหลังออกอะไรก็ได้ $\rightarrow\ 6$ แบบ $\rightarrow$ รวม 15 แบบ

23. 1

6 ปีต่อมา ทั้ง 6 คน อายุเฉลี่ยเพิ่มเป็น 40 ปี แต่ s เท่าเดิม $=8$
จะได้ $\frac{\sum x^2}{6}-40^2=8^2\ \rightarrow\ \sum x^2=9984$ ดังนั้น $\sum x^2$ ที่เพิ่มอีก 2 คน $=9984+2(40^2)=13184$
สองคนที่เพิ่ม อายุเท่า $\bar{x}$ ดังนั้น $\bar{x}$ ไม่เปลี่ยน $\rightarrow\ s=\sqrt{\frac{13184}{8}-40^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\ \rightarrow$ ตอบ $\frac{4\sqrt{3}}{40}=\frac{\sqrt{3}}{10}$

24. 2

เรียงได้ $2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 9, 12, 18 \rightarrow \text{Mode} = 4\ ,\ \text{Med} = 4.5\ ,\ \bar{x} = \frac{74}{12} = 6.17$

25. 3

ยกกำลัง 6 ตลอด ได้ $7^3 \cdot 5\ ,\ 5^3 \cdot 7\ ,\ 5^2 \cdot 7\ ,\ 7^2 \cdot 5$ เอา $5 \cdot 7$ หารตลอด เหลือ $7^2\ ,\ 5^2, 5, 7$

26. 7

แก้สมการ $\binom{a}{2} = 10$ ได้ $n(A) = 5$ กับ $\binom{b}{2} = 6$ ได้ $n(B) = 4$
ย้อนสูตร 2^n สองเที่ยว จะได้ $A \cap B$ มี 2 ตัว ดังนั้น $n(A \cup B) = 5 + 4 - 2 = 7$

27. 20

ข้อนี้ ถ้าจะคิดจริงๆ มีได้หลายคำตอบตอบ คนออกข้อสอบ น่าจะอยากจะให้เราทำ โดยการเทียบเลขชี้กำลัง
เนื่องจากทางขวา $16^{64} = 2^{256} = 5^0 2^{256}$ ดังนั้น $x - 2^A = 0$ และ $y^A = 256$ (ปกติทำแบบนี้ไม่ได้นะ - -")
จาก $x - 2^A = 0$ จะได้ $x = 2^A$ ยกกำลัง A ทั้งสองข้าง ได้ $x^A = 2^{A^2}$ ...(1)
จาก $A = \frac{\log y}{\log x} = \log_x y$ ดังนั้น $y = x^A$ แทนใน (1) ได้ $y = 2^{A^2}$ ยกกำลัง A อีก ได้ $y^A = 2^{A^3}$
แต่ $y^A = 256$ ดังนั้น $256 = 2^{A^3}$ ได้ $A^3 = 8$ ได้ $A = 2$
แทน $A = 2$ ใน $x - 2^A = 0$ และ $y^A = 256$ ได้ $x = 4\ ,\ y = 16$ ดังนั้น คำตอบ $x + y$ คือ 20
(แต่จริงๆ ข้อนี้มีคำตอบอื่นอีก เช่น $x = 78.46162\ ,\ y = 78.46162$)

28. 373

$(1 + \tan^2 x)\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$
เอาสมการ $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ มายกกำลังสองสองข้าง จะได้ $1 + 2\sin x \cos x = \frac{16}{9}$ จะได้ $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{18}{7}$
จะได้ $a^2 + b^2 = 18^2 + 7^2 = 373$

29. 5

$A: \frac{(x-1)^2}{(x-1)^3} = 3 \rightarrow x = \frac{4}{3}\ ,\quad B: x + 1 = 4 + x - 1 - 4\sqrt{x-1} \rightarrow x = \frac{5}{4} \rightarrow$ ตอบ 5

30. 4

ให้ $\sqrt{x^2 - 4x - 1} = k \rightarrow 5^{1+k} + 5^{\frac{4-k^2}{2+k}} = 126 \rightarrow 5^{1+k} + 5^{2-k} = 126 \rightarrow$ คูณ 5^k ตลอด
ได้ $5(5^{2k}) - 126(5^k) + 25 = 0 \rightarrow (5(5^k) - 1)(5^k - 25) = 0 \rightarrow k = -1, 2$ แต่ k เป็นรูท ≥ 0
ได้ $\sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -1\ ,\ 5 \rightarrow$ ตอบ 4

31. 162

ได้แกนเอก $= 6\sqrt{2} \rightarrow a = 3\sqrt{2} \rightarrow$ ผ่าน $(4, 1)$ แสดงว่า $\frac{4^2}{(3\sqrt{2})^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \rightarrow b = 3$
L ชัน $\frac{1-0}{4-4.5} = -2$ ผ่านจุด $(4, 1)$ ได้ $y = -2x + 9 \rightarrow 2x + y - 9 = 0 \rightarrow d = \frac{|2(0)+0-9|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$
วงรี มี $c = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3 \rightarrow$ โฟกัส $(3, 0), (-3, 0) \rightarrow |AF_1||AF_2| = (\sqrt{2})(\sqrt{50}) = 10$

ได้ $d^2|AF_1||AF_2| = \left(\frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 10 = 162$

32. 2

ใส่ tan ตลอด ได้ $\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{1+\left(\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x})} = \frac{\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}}}{\frac{1-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = \frac{1+x}{1+x} = 1$ และ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = 1$

ดังนั้น $\tan\theta + \cot\theta = 1 + 1 = 2$

33. 2

จะได้ $-4x - 12 + 14 + 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 1$

ดังนั้น $\det(((A^t)^{-1})^t)^{-1} = \det A = 1 + 1 = 2$

34. 16

ดึง r ออกจากตัวส่วน ได้ $\frac{a_1+a_3}{r(a_1+a_3)} + \frac{a_3+a_5}{r(a_3+a_5)} + \frac{a_5+a_7}{r(a_5+a_6)} + \ldots + \frac{a_{2011}+a_{2013}}{r(a_{2011}+a_{2013})} = 2012$

ฝั่งซ้ายได้ $\frac{1}{r}$ บวกกัน $= \frac{2011-1}{2} + 1 = 1006$ ตัว $\rightarrow r = \frac{1006}{2012} = \frac{1}{2}$

ให้ $x = 1 + \frac{5}{2} + \frac{12}{2^2} + \frac{22}{2^3} + \ldots$ (1) $\rightarrow$ หาร 2 จะได้ $\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{12}{2^3} + \frac{22}{2^4} + \ldots$ (2)

(1) – (2) : $\frac{x}{2} = 1 + \frac{4}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \ldots$ (3) $\rightarrow$ หาร 2 จะได้ $\frac{x}{4} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \ldots$ (4)

(3) – (4) : $\frac{x}{4} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 4 \rightarrow x = 16$

35. 11

$\left|\frac{(z+1)(1+i)}{z(1+i)+5+i}\right| = \left|\frac{z+1}{z+\frac{5+i}{1+i}}\right| = \left|\frac{z+1}{z+\frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}}\right| = \left|\frac{z+1}{z+\frac{6-4i}{2}}\right| = \left|\frac{z+1}{z+3-2i}\right| = \frac{\sqrt{(a+1)^2+b^2}}{\sqrt{(a+3)^2+(b-2)^2}} = 1$

$\rightarrow (a+1)^2 + b^2 = (a+3)^2 + (b-2)^2 \rightarrow 2a + 1 = 6a + 9 - 4b + 4 \rightarrow b = a + 3$

จาก $|z| = \sqrt{65}$ จะได้ $a^2 + (a+3)^2 = 65 \rightarrow a^2 + 3a - 28 = 0 \rightarrow (a+7)(a-4) = 0$

z อยู่ Q_1 ได้ $a = 4, b = 7 \rightarrow$ ตอบ $4 + 7 = 11$

36. 205

จะได้ $a_5 - a_1 = b_5 - b_2 \rightarrow 4d_a = 3d_b \rightarrow \frac{d_b}{d_a} = \frac{4}{3}$

$\frac{(b_6-b_4)+(b_6-b_1)}{a_4-a_2} = \frac{2d_b+5d_b}{2d_a} = \frac{7d_b}{2d_a} = \frac{7}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{14}{3} \rightarrow 14^2 + 3^2 = 205$

37. 3

จะได้ $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ดังนั้น $\frac{a_n}{a_n-1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}-1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n^2+n-2}{2}} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)}$

ดังนั้น $\frac{a_2a_3a_4\ldots a_n}{(a_2-1)(a_3-1)(a_4-1)\ldots(a_n-1)} = \frac{a_2}{a_2-1}\cdot\frac{a_3}{a_3-1}\cdot\frac{a_4}{a_4-1}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_n-1}$

$= \frac{(2)(3)}{(4)(1)}\cdot\frac{(3)(4)}{(5)(2)}\cdot\frac{(4)(5)}{(6)(3)}\cdot\frac{(5)(6)}{(7)(4)}\cdot\ldots\cdot\frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)}$ จะตัดกันได้ เหลือ $\frac{3}{1}\cdot\frac{n}{n+2}$

ดังนั้น ลิมิตของลำดับ $= 3$

38. 24

$\frac{2x-8}{2x-\sqrt{4x^2-3x+12}} \cdot \frac{2x+\sqrt{4x^2-3x+12}}{2x+\sqrt{4x^2-3x+12}} = \frac{(2x-8)\left(2x+\sqrt{4x^2-3x+12}\right)}{4x^2-4x^2+3x-12} = \frac{2\left(2x+\sqrt{4x^2-3x+12}\right)}{3}$

ดังนั้น $\frac{2\left(2(4)+\sqrt{4(4)^2-3(4)+12}\right)}{3} = k \cdot \frac{4}{3} \rightarrow k = 8 \rightarrow f(8+1) = \frac{8(9)}{3} = 24$

39. 354

$f'(x) = ax^3 + bx$, $f''(x) = 3ax^2 + b$ จาก $f''(0) = 6$ จะได้ $b = 6$

จาก $f'(1) = 18$ จะได้ $a + 6 = 18 \rightarrow a = 12 \rightarrow f(x) = 3x^4 + 3x^2 + c$

จาก $f(2) = f(1) + f(0)$ จะได้ $48 + 12 + c = 3 + 3 + c + c \rightarrow c = 54$

$g'(x) = (x^3 + 2x)(12x^3 + 6x) + (3x^2 + 2)(3x^4 + 3x^2 + 54)$

จะได้ $g'(-1) = (-1-2)(-12-6) + (3+2)(3+3+54) = 354$

40. 168

จะได้ 5 – 2i เป็นคำตอบด้วย $\rightarrow f(x) = k(x+1)\big(x-(5+2\mathrm{i})\big)\big(x-(5-2\mathrm{i})\big)$

$= k(x+1)(x^2-10x+29)$ จาก $f(0) = 58$ จะได้ $k(0+1)(0-0+29) = 58 \rightarrow k = 2$

ดังนั้น $f(x) = 2(x+1)(x^2-10x+29) = 2x^3 - 18x^2 + 38x + 58$

จะได้ $f(-x) = -2x^3 - 18x^2 - 38x + 58$ ดังนั้น $f(x) - f(-x) = 4x^3 + 76x$

อินทิเกรตได้ $x^4 + 38x^2 \rightarrow$ ตอบ $\left(2^4 + 38(2^2)\right) - (0+0) = 168$

41. 48

= แบบทั้งหมด – แบบที่ 1 ติดกัน – แบบที่ 3 ติดกัน + แบบที่ 1 ติดกันและ 3 ติดกัน

$= \frac{6!}{2!2!2!} - \frac{5!}{2!2!} - \frac{5!}{2!2!} + \frac{4!}{2!} = 90 - 30 - 30 + 12 = 48$ แบบ

42. 5927

d มากสุด $99 \rightarrow c < 594 \rightarrow c$ มากสุด $593 \rightarrow b < 2965 \rightarrow b$ มากสุด $2964 \rightarrow a < 5928$

43. 396

$100a + 10b + c = 10a + b + 10b + a + 10a + c + 10c + a + 10b + c + 10c + b$

$78a = 12b + 21c \rightarrow 26a = 4b + 7c \leq 36 + 63 = 99 \rightarrow a \leq 3$

$a = 3$ ได้ $4b + 7c = 78$ ไล่แทน $b = 9$ ลงมา จนกว่าจะเจอที่หารด้วย 7 ลงตัว ได้ $b = 9$, $c = 6$

44. 135

= แบบทั้งหมด – แบบที่ไม่มีคู่ไหนมาจากอำเภอเดียวกัน

$= \binom{6}{2}\binom{6}{2} - \binom{6}{2}\binom{4}{2} = 225 - 90 = 135$

45. 200

$\left|\bar{b} - \bar{c}\right| = \sqrt{4^2 + (y-1)^2} = 5 \rightarrow y = 4, -2$ และจาก $\bar{a} \perp \bar{b}$ จะได้ $6x + \frac{12y}{5} = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{5}, \frac{4}{5}$

แต่ $\bar{a} \cdot \bar{c} > 0$ จะได้ $2x + \frac{12}{5} > 0 \rightarrow x > -\frac{6}{5} \rightarrow$ เหลือ $x = \frac{4}{5}$ และ $y = -2$

$5\bar{a}+\bar{b}=(4\bar{\imath}+12\bar{\jmath})+(6\bar{\imath}-2\bar{\jmath})=10\bar{\imath}+10\bar{\jmath}\ \rightarrow\ |5\bar{a}\ +\ \bar{b}|^2=10^2+10^2=200$

46. 20

จะได้พื้นที่ของนาย ก. คือ $0.5-0.0948=0.4052\ \rightarrow\ z_{ก}=1.31$

จะได้พื้นที่ของนาย ข. คือ $-(0.5-0.1064)=-0.3937\ \rightarrow\ z_{ข}=-1.24$

$z_{ก}-z_{ข}=1.31-(-1.24)=\ 2.55=\frac{x_{ก}-x_{ข}}{s}=\frac{51}{s}\ \rightarrow\ s=\frac{51}{2.55}=20$

47. 12

ทำนาย ฟิสิกส์ (x_i) จาก คณิตศาสตร์ (y_i) ต้องใช้ $\hat{X}=a+bY$

จะได้ $\sum x_i=54$ และ $\sum y_i=36$ จะได้ระบบสมการคือ $54=6a+36b$ และ $428=36a+268b$

ตัดเป็นอย่างต่ำ ได้ $9=a+6b$ และ $107=9a+67b$ แทน a จากสมการแรก ได้ $107=9(9-6b)+67b$

$\rightarrow\ 26=13b\ \rightarrow\ b=2\ ,\ a=-3\ \rightarrow$ ตอบ $-3+2(7.5)=12$

48. 10

ค่อยๆหาไล่จาก y น้อยๆ เริ่มจากกลุ่ม $y=0$ ใช้เงื่อนไขที่สอง

$F(0,0)=1\ ,\ F(1,0)=2\ ,\ F(2,0)=3\ ,\ F(3,0)=4\ ,\ F(4,0)=5$

พวก $y=1$: $F(0,1)=F(1,0)=2$

$F(1,1)=F(F(0,1),0)=F(2,0)=3$

$F(2,1)=F(F(1,1),0)=F(3,0)=4$

$F(3,1)=F(F(2,1),0)=F(4,0)=5$

พวก $y=2$: $F(0,2)=F(1,1)=3$

$F(1,2)=F(F(0,2),1)=F(3,1)=5$

ดังนั้น $F(1,2)+\mathrm{F}(3,1)=5+5=10$

49. 6

จาก (1) แทน $x=1$ จะได้ $1*y\ =\ (1*1)y\ =\ y$ เปลี่ยนชื่อ y เป็น x ได้ $1*x=x$

แทน $1*x=x$ ในข้อ (2) ได้เป็น $x*x\ =\ x$

แทน $x*x\ =\ x$ ในข้อ (1) ได้เป็น $x*(xy)\ =\ xy$ ดังนั้น $a*b\ =\ a*\left(a\cdot\frac{b}{a}\right)\ =\ a\cdot\frac{b}{a}\ =\ b$

สรุป เครื่องหมาย $*$ คือให้ตอบตัวหลังนั่นเอง ดังนั้น $2*(5*(5*6))\ =\ 6$

50. 4

จะได้ $f\big(f(x)\big)=4+x\big(4-f(x)\big)$ ...(1)

แทน x ด้วย 0 จะได้ $f\big(f(0)\big)=4+0\big(4-f(0)\big)=4$ ...(2)

จาก (2) ใส่ f ทั้งสองข้าง ได้ $f\left(f\big(f(0)\big)\right)=f(4)$ ...(3)

แทน x ใน (1) ด้วย $f(0)$ จะได้ $f\left(f\big(f(0)\big)\right)=4+f(0)\left(4-f\big(f(0)\big)\right)$ ...(4)

แต่จาก (2) จะได้ $f\big(f(0)\big)=4$ ดังนั้น $f\left(f\big(f(0)\big)\right)=4+f(0)(4-4)=4$ ...(5)

จาก (3) และ (5) จะได้ $f(4)=4$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สนธยา เสนามนตรี , คุณ ณัฐสรณ์ เส็งเฮ้า , คุณ Quest Internal , คุณ Ntt Dks และ อีกคนหนึ่งที่มาโพสท์ข้อสอบบนวอลผม (เค้าบอกผมว่าถ้าผมโหลดเสร็จให้ลบทิ้ง ผมจำชื่อเค้าไม่ได้ เพราะผมลบโพสเค้าไปแล้ว = =" ขอโทษนะครับ _/_)

ขอบคุณ ท่านอาจารย์ Sila Sookrasamee ที่ช่วยตรวจคำตอบ ด้วยนะครับ